

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МИРЭА – РОССИЙСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

*На правах рукописи*

Рабинович Александр Соломонович

**Исследование некоторых типов дифференциальных уравнений с сильной  
нелинейностью**

РЕЗЮМЕ ДИССЕРТАЦИИ

на соискание ученой степени доктора наук  
по прикладной математике НИУ ВШЭ

Москва – 2018

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы** связана с той большой ролью, которую играет разработка новых математических подходов для исследования недостаточно изученных задач механики и физики, описываемых нелинейными системами дифференциальных уравнений.

Хотя существует значительное число математических методов в теории дифференциальных уравнений, все же в этой области остается немало проблем, требующих для своего решения привлечения ряда новых методов. В первую очередь это касается задач механики и физики, сводящихся к анализу систем дифференциальных уравнений с сильной нелинейностью. Исследованию ряда таких проблем и посвящена диссертация. В ней изучаются следующие вопросы:

- 1) Исследование нелинейных дифференциальных уравнений Навье-Стокса, описывающих течение вязкой несжимаемой жидкости.

Уравнения Навье-Стокса являются основными уравнениями гидродинамики и им посвящено большое число работ. Однако ввиду их существенной нелинейности в их изучении преобладают численные подходы, а число полученных аналитических решений весьма мало. По этой причине в диссертационной работе большое внимание уделяется поиску частных аналитических решений, которые могли бы дать качественное представление об особенностях течения вязкой несжимаемой жидкости. При этом особый интерес может представить случай больших чисел Рейнольдса, при которых течение жидкости может стать турбулентным, а также случаи проявления в ней явления кавитации.

В диссертации исследуются следующие классы решений уравнений Навье-Стокса, имеющих осевую симметрию:

- а) Исследование классов решений уравнений Навье-Стокса, представимых в виде степенных рядов по радиальной координате с коэффициентами, зависящими от времени и осевой координаты. Изучение случаев, при которых может быть определен явный вид этих коэффициентов и найдены условия сходимости данных рядов, а также случаев, при которых они приводят к решениям в замкнутой форме.

- б) Исследование специальных форм для скоростей и давления в вязкой несжимаемой жидкости и приводящих к частным аналитическим решениям трехмерных уравнений Навье-Стокса. Изучение особенностей этих решений при больших числах Рейнольдса, когда становится возможным турбулентное течение вязкой жидкости. Изучение случаев течения жидкости при возникновении кавитационных явлений.

- 2) Исследование нелинейных уравнений Янга-Миллса для описания интенсивных неабелевых полей

Как известно, уравнения Янга-Миллса занимают центральное место при описании электрослабых и сильных взаимодействий и им посвящено большое число работ. Важную роль в их изучении сыграли неабелевы сферически-симметричные решения Т. Ву и Ч. Янга, Г. 'т Хоофта и А. Полякова, решение в виде неабелевых плоских волн С. Коулмена, оказавшее влияние на последующие работы в этой области и, в том числе, на данную диссертацию, нестационарные неабелевы решения С. Матиняна и Г. Саввиди, исследования Р. Гласси и В. Штрауса задачи Коши для уравнений Янга-Миллса и целый ряд других работ.

В диссертационной работе ищутся новые классы решений уравнений Янга-Миллса. В ней получены следующие типы решений:

а) Стационарные и нестационарные сферически-симметричные решения уравнений Янга-Миллса для классических источников поля, представляющие собой нелинейные обобщения классических максвелловских решений.

б) Осесимметричные решения уравнений Янга-Миллса в виде неабелевых волн, распространяющихся со скоростью света вдоль некоторого направления.

в) Решения уравнений Янга-Миллса в виде неабелевых расходящихся волн, распространяющихся со скоростью света.

Данные решения могут быть важны в изучении нелинейных процессов, происходящих в космических источниках полей Янга-Миллса.

3) Исследование нелинейных динамических уравнений для релятивистских частиц, движущихся под действием юкавского и кулоновского потенциалов

Рассматривается движение релятивистской частицы в классическом приближении, находящейся под действием двух центральных сил юкавского и кулоновского типов. Для его описания используется классический лагранжиан для частицы, находящейся в электрическом поле, в который вводится также потенциал Юкавы.

Данный лагранжиан приводит к системе нелинейных динамических уравнений второго порядка. Эта система уравнений применяется к релятивистской частице, движущейся в некоторой плоскости под действием центральных сил. Проводится исследование рассматриваемых уравнений в полярных координатах и определяется их первый интеграл. Показывается, что при определенных условиях возможно движение частиц по замкнутым орбитам.

**Цель работы** состояла в изучении нелинейных дифференциальных уравнений, возникающих в ряде физических задач.

Для этого в работе было

- проведено исследование осесимметричных решений уравнений Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости, представимых в виде степенных рядов по радиальной координате с коэффициентами, зависящими от времени и осевой координаты;

- найдено частное решение трехмерных уравнений Навье-Стокса специального вида и рассмотрены его особенности при больших числах Рейнольдса, когда становится возможным турбулентное течение вязкой жидкости;

- найдено частное решение трехмерных уравнений Навье-Стокса, описывающее случай течения жидкости при появлении кавитации.

- получены и исследованы стационарные и нестационарные сферически симметричные решения уравнений Янга-Миллса с  $SU(2)$  симметрией для классических источников специального типа;

- найдены неабелевы волновые решения для описания излучений космических источников полей Янга-Миллса;

- получена и исследована нелинейная система дифференциальных уравнений, описывающая движение релятивистской частицы в центральном поле юкавского и кулоновского потенциалов.

**Научная новизна** состоит в математическом анализе нелинейных дифференциальных уравнений, возникающих в ряде физических проблем.

Найдены некоторые осесимметричные решения уравнений Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости в виде степенных рядов по радиальной координате с коэффициентами, зависящими от времени и осевой координаты.

Найдены частные решения трехмерных уравнений Навье-Стокса, позволяющее исследовать некоторые особенности течения вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса, когда может появляться турбулентность, а также при возникновении кавитации.

Получены некоторые новые типы стационарных и нестационарных сферически-симметричных решений уравнений Янга-Миллса.

Найдены некоторые осесимметричные неабелевы волновые решения уравнений Янга-Миллса и их решения в виде неабелевых расходящихся волн.

Рассмотрена и исследована система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая движение релятивистской частицы под действием центральных полей юкавского и кулоновского типов.

#### **Теоретическая и практическая значимость работы:**

Полученные в диссертационной работе некоторые новые решения уравнений Навье-Стокса могут быть применены для анализа течений вязкой несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса, когда становится возможным появление турбулентности, а также при возникновении кавитации.

Найденные в работе новые решения уравнений Янга-Миллса для сферически-симметричных источников специального типа и для распространяющихся неабелевых волн могут быть применены для изучения нелинейных физических процессов, происходящих в звездах.

Проведенное в ней исследование системы нелинейных дифференциальных уравнений для релятивистских частиц, движущихся под действием центральных полей юкавского и кулоновского типа, важно для изучения динамики нуклонов и антинуклонов в полях атомных ядер.

**Научные положения, выносимые на защиту:**

1) Новые классы осесимметричных решений уравнений Навье-Стокса в виде степенных рядов по радиальной координате с коэффициентами, зависящими от времени и осевой координаты.

2) Новые частные решения специального вида для трехмерных уравнений Навье-Стокса и их особенности при больших числах Рейнольдса, когда становится возможным турбулентное течение вязкой жидкости, а также при возникновении кавитационных явлений.

3) Новые классы стационарных и нестационарных сферически-симметричных решений уравнений Янга–Миллса.

4) Новые типы осесимметричных неабелевых волновых решений уравнений Янга-Миллса и их решений в виде неабелевых расходящихся волн.

5) Исследование системы нелинейных дифференциальных уравнений для описания движения релятивистской частицы под действием центральных сил юкавского и кулоновского типов.

**Достоверность полученных результатов.** Проведенные в диссертационной работе исследования опираются на строгий математический анализ изучаемых нелинейных дифференциальных уравнений и найденных для них решений.

**Апробация работы.** Материалы диссертации докладывались на семинарах в МГУ им. М.В. Ломоносова (2000, 2009, 2012, 2017), в РУДН (1998, 2003, 2005, 2012, 2017), в Институте ядерных исследований РАН (2004), в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН (2009, 2010), в Институте общей физики им. А.М. Прохорова РАН (2009), в Институте космических исследований РАН (2009), в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (2010, 2012), на 10-ой, 11-ой, 12-ой, 16-ой и 17-ой Международных школах – семинарах по теоретической и математической физике (Казань, 1998, 1999, 2000, 2004, 2005), на 11-ой Международной конференции европейского физического общества (Лондон, 1999), на 13-ой Ломоносовской конференции по физике элементарных частиц (Москва, 2007), на 1-ой Международной конференции по теоретической физике в МГОУ (Москва, 2011), на 48-ой, 49-ой, 50-ой, 51-ой и 52-ой Всероссийских конференциях по проблемам физики частиц, физики плазмы и конденсированных сред, оптоэлектроники в Российском университете дружбы народов (Москва, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016) и на семинаре Я. Г. Синая в Институте проблем передачи информации РАН им. А. А. Харкевича (2016).

**Личный вклад автора.** Результаты теоретических исследований, включенные в диссертационную работу, полностью выполнены лично автором.

**Публикации.** По теме диссертации опубликованы 35 основных работ, в том числе 14 статей в рецензируемых журналах, индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus, 8 статей в рецензируемых журналах, рекомендованных Высшей Аттестационной Комиссией Министерства образования и науки РФ, и 2 монографии.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

### 1. Некоторые новые типы осесимметричных решений уравнений Навье-Стокса

#### 1.1. Исследование осесимметричных течений однородной несжимаемой вязкой жидкости

Рассмотрим уравнения Навье-Стокса, описывающие однородную несжимаемую вязкую жидкость. Они имеют вид<sup>1</sup>

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_3 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \mathbf{f} + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (1)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad \rho = \text{const}, \quad \nu = \text{const}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{v}=\mathbf{v}(t,x,y,z)$  - вектор скорости,  $p=p(t,x,y,z)$  - давление,  $v_1, v_2, v_3$  - проекции вектора скорости на ортогональные оси  $x, y, z$ ,  $t$  - время,  $\mathbf{f}=\mathbf{f}(t,x,y,z)$  - сила, действующая на единицу массы рассматриваемой жидкости,  $\rho$  - ее плотность и  $\nu$  - ее кинематическая вязкость.

Уравнения Навье-Стокса являются основными уравнениями механики жидкости и газа и им посвящено большое число аналитических и численных исследований. Однако ввиду существенной нелинейности данных уравнений, было найдено лишь небольшое число классов их точных решений. Нашей же целью является рассмотрение и изучение некоторых новых аналитических решений уравнений Навье-Стокса в случае осевой симметрии.

В дальнейшем будем рассматривать случай, в котором сила  $\mathbf{f}$  является потенциальной. Тогда для ее потенциала  $\Phi$  имеем равенство

$$\mathbf{f} = -\text{grad } \Phi. \quad (3)$$

В данном случае уравнения, (1) и (3) можно представить в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_3 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = \text{grad } q + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad q = -p/\rho - \Phi. \quad (4)$$

Нужно отметить, что дифференциальные уравнения (2) и (4) описывают вектор-функцию  $\mathbf{v}$  и, вместо давления  $p$ , скалярную функцию  $q$ . Однако, когда потенциал  $\Phi$

---

<sup>1</sup> Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986.

известен и функция  $q$  найдена, давление  $p$  может быть определено из равенства  $p = -\rho(q + \Phi)$ .

Рассмотрим осесимметричные решения уравнений Навье-Стокса. Тогда будем искать компоненты  $v_1, v_2, v_3$  вектор-функции  $\mathbf{v}$  и функцию  $q$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} v_1 = -\alpha y + \beta x, \quad v_2 = \alpha x + \beta y, \quad v_3 = \gamma, \quad \alpha = \alpha(t, r, z), \\ \beta = \beta(t, r, z), \quad \gamma = \gamma(t, r, z), \quad q = q(t, r, z), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь функция  $\alpha$  представляет собой угловую скорость точек вращающейся жидкости, а функции  $\beta$  и  $\gamma$  описывают изменение ее формы.

Подставляя выражения (5) в уравнение (2), находим

$$r\beta_r + 2\beta + \gamma_z = 0, \quad (6)$$

где  $\beta_r \equiv \partial\beta/\partial r$ ,  $\gamma_z \equiv \partial\gamma/\partial z$ .

Подставим теперь формулы (5) в уравнения Навье-Стокса (4). Тогда придем к следующим трем нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных:

$$\alpha_t + \beta(r\alpha_r + 2\alpha) + \gamma\alpha_z - \nu(\alpha_{rr} + 3\alpha_r/r + \alpha_{zz}) = 0, \quad \alpha_t \equiv \partial\alpha/\partial t, \quad (7)$$

$$\beta_t + \beta(r\beta_r + \beta) + \gamma\beta_z - \alpha^2 - \nu(\beta_{rr} + 3\beta_r/r + \beta_{zz}) = q_r/r, \quad (8)$$

$$\gamma_t + r\beta\gamma_r + \gamma\gamma_z - \nu(\gamma_{rr} + \gamma_r/r + \gamma_{zz}) = q_z. \quad (9)$$

Рассмотрим полученные уравнения (7)-(9). Вначале исключим в них функцию  $q$ . С этой целью, дифференцируя уравнения (8) и (9) относительно соответственно переменных  $z$  и  $r$  и используя очевидное тождество  $\partial q_r/\partial z = \partial q_z/\partial r$ , а также уравнение (6), придем к системе уравнений

$$\begin{aligned} \gamma_z &= -r\beta_r - 2\beta, \\ -2\alpha\beta &= \alpha_t + r\beta\alpha_r + \gamma\alpha_z - \nu(\alpha_{rr} + 3\alpha_r/r + \alpha_{zz}), \\ 2\alpha\alpha_z &= \varphi_t + r\beta\varphi_r + \gamma\varphi_z - \nu(\varphi_{rr} + 3\varphi_r/r + \varphi_{zz}), \quad \varphi = \beta_z - \gamma_r/r. \end{aligned} \quad (10)$$

## 1.2. Описание осесимметричных течений вязкой жидкости в виде степенных рядов по радиальной координате

Будем искать решения уравнений (10) в следующем виде:

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t, z)r^{2n}, \quad \beta = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(t, z)r^{2n}, \quad \gamma = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t, z)r^{2n}, \quad (11)$$

где  $a_n, b_n, c_n$  - некоторые функции переменных  $t$  и  $z$ , в области сходимости данных степенных рядов.

Тогда приходим к следующей системе рекуррентных соотношений:

$$a_{n+1} = \frac{1}{4\nu(n+1)(n+2)} \left( \dot{a}_n - \nu a_n'' + \sum_{k=0}^n \frac{(n-k+1)a_k' c_{n-k} - (k+1)a_k c_{n-k}'}{n-k+1} \right), \quad (12)$$

$$d_{n+1} = \frac{1}{4\nu(n+1)(n+2)} \left( \dot{d}_n - \nu d_n'' - \sum_{k=0}^n \frac{(n-k+1)(2a_k' a_{n-k} - d_k' c_{n-k}) + k d_k c_{n-k}'}{n-k+1} \right), \quad (13)$$

$$b_n = -\frac{c_n'}{2(n+1)}, \quad c_{n+1} = -\frac{1}{2(n+1)} \left( d_n + \frac{c_n''}{2(n+1)} \right), \quad (14)$$

в которой три функции  $a_0(t, z)$ ,  $c_0(t, z)$  и  $d_0(t, z)$  являются произвольными бесконечно дифференцируемыми функциями.

### 1.3. Частные решения уравнений Навье-Стокса в виде степенных рядов, сходящихся при произвольных значениях переменных

Рассмотрим три случая, в которых соотношения (12)-(14) дают решения уравнений Навье-Стокса в виде рядов (11) при любых значениях переменных  $t, z$  и  $r$ .

#### 1.3.1. Класс решений в замкнутой форме

Обратимся к случаю  $a_0 = a(t)$ ,  $c_0 = g(t) + zh(t)$ ,  $d_0 = 0$ .

Тогда из (12)-(14) получаем

$$a_n = a_n(t), \quad c_{n+1}(t) = 0, \quad d_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (15)$$

$$a_{n+1} = \frac{\dot{a}_n - (n+1)h a_n}{4\nu(n+1)(n+2)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad h = h(t), \quad a_n = a_n(t). \quad (16)$$

Рассмотрим теперь случай  $a_{N+1} = 0$ , где  $N$  – некоторое неотрицательное целое число. Тогда из (16) получаем

$$a_n = 0, \quad n \geq N+1 \quad (17)$$

и последовательно находим  $a_N, a_{N-1}, \dots, a_0$  из рекуррентного соотношения

$$a_n = 4\nu(n+1)(n+2)A_n(t) \left( \int_0^t \frac{a_{n+1}(\tau)}{A_n(\tau)} d\tau + C_n \right), \quad A_n(t) = \exp \left( (n+1) \int_0^t h(\tau) d\tau \right), \quad (18)$$

где  $n = N, N-1, \dots, 0$ ,  $a_{N+1} = 0$  и  $C_n$  – произвольные константы.

В результате получаем следующие решения уравнений (10):

$$\alpha = \sum_{n=0}^N a_n(t) r^{2n}, \quad \beta = -\frac{1}{2} h(t), \quad \gamma = g(t) + zh(t), \quad (19)$$

где  $a_n(t)$  определяются по формулам (17)-(18),  $N$  – произвольное неотрицательное целое число,  $g(t)$  и  $h(t)$  – произвольные дифференцируемые функции и выражения для  $\alpha$  и  $\gamma$  содержат  $N+1$  произвольных констант  $C_0, C_1, \dots, C_N$ .



### 1.3.2. Класс решений, независящий от $z$

Рассмотрим случай  $a_0 = a(t)$ ,  $c_0 = c(t)$ ,  $d_0 = d(t)$ . Тогда из (12)-(14) находим

$$a_n = a_n(t), \quad c_n = c_n(t), \quad d_n = d_n(t), \quad n \geq 0, \quad (20)$$

$$a_{n+1} = \frac{\dot{a}_n}{4\nu(n+1)(n+2)}, \quad d_{n+1} = \frac{\dot{d}_n}{4\nu(n+1)(n+2)}, \quad c_{n+1} = -\frac{d_n}{2(n+1)}. \quad (21)$$

Формулы (21) дают

$$a_n = \frac{a^{(n)}(t)}{(4\nu)^n n!(n+1)!}, \quad d_n = \frac{d^{(n)}(t)}{(4\nu)^n n!(n+1)!}, \quad c_{n+1} = -\frac{1}{2} \frac{d^{(n)}(t)}{(4\nu)^n ((n+1)!)^2}, \quad n \geq 0, \quad (22)$$

где  $a^{(0)}(t) \equiv a(t)$ .

В результате получаем

$$\alpha = a(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{(n)}(t) r^{2n}}{(4\nu)^n n!(n+1)!}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = c(t) - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^{(n)}(t) r^{2(n+1)}}{(4\nu)^n ((n+1)!)^2}. \quad (23)$$

Рассмотрим теперь частный случай

$$a(t) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \exp(-\omega_m t), \quad d(t) = D_0 + \sum_{m=1}^{\infty} D_m \exp(-\theta_m t), \quad (24)$$

где  $A_m, D_m, \omega_m, \theta_m$  - константы,  $\omega_m > 0$ ,  $\theta_m > 0$ ,  $t \geq 0$ , и бесконечные последовательности  $A_m$  и  $D_m$  - абсолютно суммируемы.

Тогда из формул (23) находим, используя функции Бесселя 1-го рода  $J_0(x)$  и  $J_1(x)$ :

$$\alpha = A_0 + \frac{2\sqrt{\nu}}{r} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{\sqrt{\omega_m}} J_1\left(\sqrt{(\omega_m/\nu)}r\right) \exp(-\omega_m t), \quad \beta = 0, \quad (25)$$

$$\gamma = c(t) - \frac{1}{2} D_0 r^2 + 2\nu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_m}{\theta_m} \left[ J_0\left(\sqrt{(\theta_m/\nu)}r\right) - 1 \right] \exp(-\theta_m t).$$

Рассмотрим теперь жидкость, занимающую цилиндрическую область  $0 \leq r \leq r_0$ , где  $r_0$  - некоторый конечный радиус, и пусть задаются для нее следующие граничные условия:

$$\alpha(t, r_0) = \text{const}, \quad \gamma(t, r_0) = 0. \quad (26)$$

Следует отметить, что частный случай  $\alpha \equiv 0$  рассмотрен в книге<sup>2</sup>.

При  $\alpha(t, r) \neq 0$  из (25) и (26) получаем

$$\sqrt{(\omega_m/\nu)} r_0 = k_m, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (27)$$

где  $k_1, k_2, k_3, \dots$  - бесконечная последовательность положительных нулей функции Бесселя  $J_1(x)$ :  $0 < k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ ,  $J_1(k_m) = 0$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ .

Следовательно, функция  $\alpha(t, r)$  приобретает вид

<sup>2</sup> Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. - М.: Наука, 1978., с. 403.

$$\alpha = A_0 + \frac{2r_0}{r} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{k_m} J_1(k_m r / r_0) \exp(-\nu k_m^2 t / r_0^2). \quad (28)$$

Как хорошо известно, функции Бесселя  $J_{\mu}(k_m^{(\mu)} s)$ , где  $\mu > -1$  и  $J_{\mu}(k_m^{(\mu)}) = 0$ ,  $0 < k_1^{(\mu)} < k_2^{(\mu)} < \dots < k_m^{(\mu)} < \dots$ , представляют собой ортогональную систему в интервале  $0 < s < 1$  и любая непрерывная функция  $f(s)$ , определенная в данном интервале, может быть представлена в виде ряда

$$f(s) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(\mu)} J_{\mu}(k_m^{(\mu)} s), \quad 0 < s < 1, \quad (29)$$

где

$$f_m^{(\mu)} = \frac{2}{J_{\mu+1}^2(k_m^{(\mu)})} \int_0^1 s f(s) J_{\mu}(k_m^{(\mu)} s) ds, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (30)$$

Поэтому коэффициенты  $A_m$  в (28) могут быть выбраны так, чтобы удовлетворить начальному условию при  $t = 0$ :  $\alpha(0, r) = \alpha_0(r)$ , где  $\alpha_0(r)$  - произвольная непрерывная функция.

Аналогично, чтобы удовлетворить начальному условию общего вида для функции  $\gamma$  при  $t = 0$ , нужно выбрать числа  $\theta_m$  в виде

$$\sqrt{(\theta_m / \nu)} r_0 = l_m, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (31)$$

где  $l_m$  - различные положительные нули функции Бесселя  $J_0(x)$ :  $0 < l_1 < l_2 < l_3 < \dots$ ,  $J_0(l_m) = 0$ .

Тогда получаем

$$c(t) = \frac{1}{2} D_0 r_0^2 + 2r_0^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_m}{l_m^2} \exp(-\nu l_m^2 t / r_0^2), \quad (32)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} D_0 (r_0^2 - r^2) + 2r_0^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_m}{l_m^2} J_0(l_m r / r_0) \exp(-\nu l_m^2 t / r_0^2). \quad (33)$$

Таким образом, получаем класс решений уравнений Навье-Стокса, удовлетворяющих граничным условиям (26).

### 1.3.3. Класс решений, зависящих от одной функции аргументов $t$ и $z$

Рассмотрим случай  $a_0 = 0$ ,  $c_0 = c(t, z)$ ,  $d_0 = D = \text{const}$ ,

где  $c(t, z)$  - некоторая дифференцируемая функция. Тогда из формул (12)-(14) находим

$$a_n = 0, \quad d_{n+1} = 0, \quad c_{n+2} = -\frac{c_{n+1}''}{4(n+2)^2}, \quad n \geq 0, \quad c_1 = -\frac{1}{2} \left( D + \frac{c''}{2} \right) \quad (34)$$

и, следовательно,

$$c_n = (-1)^n \frac{c_z^{(2n)}}{4^n (n!)^2}, \quad n \geq 2, \quad (35)$$

где  $c_z^{(k)} \equiv \partial^k c / \partial z^k$ .

В результате получаем следующее решение уравнений (10):

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{c_z^{(2n+1)} r^{2n}}{4^n (n+1)! n!}, \quad \gamma = c - \frac{Dr^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{c_z^{(2n)} r^{2n}}{4^n (n!)^2}. \quad (36)$$

Рассмотрим теперь частный случай

$$c(t, z) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m(t) \sin(\lambda_m(t)z + \delta_m(t)), \quad (37)$$

где  $C_m(t)$ ,  $\lambda_m(t)$  и  $\delta_m(t)$  - некоторые дифференцируемые функции от  $t \geq 0$  и бесконечная последовательность  $C_m(t)$  - абсолютно суммируема для любых  $t \geq 0$ .

Тогда из (36) получаем, используя модифицированные функции Бесселя 1-го рода  $I_0(x)$  и  $I_1(x)$ :

$$\beta = -\frac{1}{r} \sum_{m=1}^{\infty} C_m(t) \cos(\lambda_m(t)z + \delta_m(t)) I_1(\lambda_m(t)r), \quad (38)$$

$$\gamma = -\frac{1}{2} Dr^2 + \sum_{m=1}^{\infty} C_m(t) \sin(\lambda_m(t)z + \delta_m(t)) I_0(\lambda_m(t)r). \quad (39)$$

#### 1.4. Частное решение уравнений Навье-Стокса, экспоненциально затухающее при больших значениях радиальной координаты

Обратимся к уравнениям Навье-Стокса (6)-(9) в рассматриваемом осесимметричном случае. Будем искать частное решение этих уравнений в виде

$$\alpha = A(t, r)/r^2, \quad \beta = B(t, r)/r^2, \quad \gamma = C(t, r)z/r^2, \quad q = q(t, r). \quad (40)$$

Тогда уравнения (6)-(9) дадут

$$C = -rB_r, \quad A_t + (\nu + B)A_e/r - \nu A_{rr} = 0, \quad (41)$$

$$B_t + B(B_r - B/r)/r - A^2/r^2 - \nu(B_{rr} - B_r/r) = rq_r, \quad (42)$$

$$\nu B_{rr} - (\nu + B)(B_{rr} - B_r/r)/r + B_r^2/r - B_{rr} = 0. \quad (43)$$

Перейдем теперь к следующим безразмерным аргументам и функциям:

$$\tau = (V_*/l_*)t, \quad \eta = (r/l_*)^2, \quad P(\tau, \eta) = A(t, r)/\nu, \quad Q(\tau, \eta) = B(t, r)/\nu, \quad (44)$$

$$S(\tau, \eta) = (q_r/r)(l_*/V_*)^2,$$

где  $V_*$  - среднее абсолютное значение скорости жидкости и  $l_*$  - ее характерный размер. В результате из уравнений (41)-(43) получим

$$4\eta P_{\eta\eta} - 2QP_{\eta} - \text{Re} P_{\tau} = 0, \quad \text{Re} = V_* l_*/\nu, \quad P = P(\tau, \eta), \quad (45)$$

$$\operatorname{Re} Q_\tau - 4\eta Q_{\eta\eta} + Q(2Q_\eta - Q/\eta) - P^2/\eta = \operatorname{Re}^2 S(\tau, \eta)\eta, \quad Q = Q(\tau, \eta), \quad (46)$$

$$4(\eta Q_{\eta\eta\eta} + Q_{\eta\eta}) - 2(QQ_{\eta\eta} - Q_\eta^2) - \operatorname{Re} Q_{\tau\eta} = 0, \quad (47)$$

где  $\operatorname{Re}$  – число Рейнольдса.

Рассмотрим уравнение (47) и будем искать его частное решение в виде

$$Q = Ke^{f(\tau)\xi}, \quad \xi = \operatorname{Re} \eta, \quad K = \operatorname{const}. \quad (48)$$

Тогда из (47) найдем

$$(4f^2 - \dot{f})(1 + f\xi) = 0. \quad (49)$$

Отсюда приходим к уравнению

$$\dot{f} = 4f^2, \quad f = f(\tau), \quad (50)$$

которое дает следующее решение:

$$f = -\frac{1}{4\tau}, \quad (51)$$

сингулярное при начальном времени  $t = 0$ .

Из (48) и (51) находим решение уравнения (47)

$$Q = K \exp\left(-\operatorname{Re} \frac{\eta}{4\tau}\right). \quad (52)$$

Что касается уравнения (46), то оно позволяет найти функцию  $S(\tau, \eta)$ , определяющую распределение давления в жидкости.

Обратимся к уравнению (45) и будем искать его решение в виде

$$P = P(\theta), \quad \theta = \operatorname{Re} \frac{\eta}{4\tau}. \quad (53)$$

Подставляя (52) и (53) в уравнение (45), получаем

$$\theta P''(\theta) + (\theta - \frac{1}{2}Ke^{-\theta})P'(\theta) = 0. \quad (54)$$

Отсюда приходим к решению

$$P'(\theta) = M \exp\left(-\theta + \frac{1}{2}KEi(-\theta)\right), \quad Ei(x) = \int_{-\infty}^{-x} \frac{e^{-s}}{s} ds, \quad (55)$$

где  $M = \operatorname{const}$  и  $Ei(x)$  - экспоненциальный интеграл.

Из (55) находим функцию  $P(\theta)$  вида

$$P = M \int_{-\infty}^{\theta} \exp\left(-\theta + \frac{1}{2}KEi(-\theta)\right) d\theta, \quad (56)$$

стремящуюся к нулю при  $r \rightarrow \infty$ .

Обратимся к вычислению компонент скорости жидкости. Как следует из (44), (52) и (53),

$$A = \nu P(\theta), \quad B = \nu Ke^{-\theta}, \quad (57)$$

где, учитывая выражение для числа Рейнольдса в (45),

$$\theta = \operatorname{Re} \frac{\eta}{4\tau} = \frac{r^2}{4\nu t}. \quad (58)$$

Из (41), (57) и (58) находим также выражение для функции  $C$ :

$$C = -rB_r = K \frac{r^2}{2t} e^{-\theta}. \quad (59)$$

Применяя теперь формулы (57) и (59), из (5) и (40) находим

$$v_1 = \frac{V}{r^2} \left( -P(\theta)y + Ke^{-\theta}x \right), \quad v_2 = \frac{V}{r^2} \left( P(\theta)x + Ke^{-\theta}y \right), \quad v_3 = Ke^{-\theta} \frac{z}{2t}. \quad (60)$$

где функция  $P(\theta)$  определяется формулой (56).

Выражения (60) экспоненциально затухают при больших значениях радиальной координаты.

Полученное решение удовлетворяет следующим начальным и граничным условиям:

$$1) v_i = 0 \text{ при } t = 0 \text{ и } r \neq 0; \quad (61)$$

$$2) rv_i \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2, 3. \quad (62)$$

Оно описывает первоначально покоящуюся жидкость, на которую при  $t = 0$  действует источник давления, расположенный на оси  $r = 0$ .

### 1.5. Частное решение уравнений Навье-Стокса для жидкости с кавитацией

Будем теперь искать решение уравнений Навье-Стокса (6)-(9) в виде

$$\alpha = \frac{A}{r^2}, \quad \beta = -\frac{F_z}{r^2}, \quad \gamma = \frac{F_r}{r}, \quad (63)$$

где  $A = A(t, r, z)$  и  $F = F(t, r, z)$  - некоторые дифференцируемые функции.

Тогда уравнение (6) будет тождественно выполняться.

Будем далее считать, что потенциал  $\Phi = 0$ . Тогда подстановка выражений (63) для  $\alpha, \beta, \gamma$  в уравнения (7)-(9) дает

$$A_t - (A_r F_z - A_z F_r) / r - \nu (A_{rr} - A_r / r + A_{zz}) = 0, \quad (64)$$

$$F_{tz} + (F_r F_{zz} - F_z F_{rz}) / r + (A^2 + F_z^2) / r^2 - \nu (F_{rrz} - F_{rz} / r + F_{zzz}) = \frac{1}{\rho} r p_r, \quad (65)$$

$$F_{tr} + (F_r F_{rz} - F_z F_{rr}) / r + F_r F_z / r^2 - \nu (F_{rrr} - F_{rr} / r + F_r / r^2 + F_{rzz}) = -\frac{1}{\rho} r p_z. \quad (66)$$

Выберем переменную  $\eta = r^2$  вместо  $r$ . Тогда функции  $p, A$  и  $F$  могут быть представлены как

$$p = p(t, \eta, z), \quad A = A(t, \eta, z), \quad F = F(t, \eta, z), \quad \eta = r^2. \quad (67)$$

Подставляя выражения (67) в уравнения (64)-(66), приходим к следующим уравнениям:

$$A_t - 2(A_\eta F_z - A_z F_\eta) - \nu (4\eta A_{\eta\eta} + A_{zz}) = 0, \quad (68)$$

$$F_{tz} + 2(F_\eta F_{zz} - F_z F_{\eta z}) + (A^2 + F_z^2)/\eta - \nu(4\eta F_{\eta\eta z} + F_{zzz}) = (2/\rho)\eta p_\eta, \quad (69)$$

$$F_{t\eta} + 2(F_\eta F_{\eta z} - F_z F_{\eta\eta}) - \nu(4\eta F_{\eta\eta\eta} + 4F_{\eta\eta} + F_{\eta z z}) = -(1/\rho)p_z/2. \quad (70)$$

Будем искать частные решения уравнений (68)-(70) в виде

$$p = p(t, \eta), \quad A(t, \eta, z) = \lambda F(t, \eta, z), \quad \lambda = \text{const} \neq 0. \quad (71)$$

Тогда подставляя выражение для  $A$  в (71) в уравнение (68), получаем

$$F_t - \nu(4\eta F_{\eta\eta} + F_{zz}) = 0. \quad (72)$$

После дифференцирования этого уравнения по  $z$  и  $\eta$  находим

$$F_{tz} - \nu(4\eta F_{\eta\eta z} + F_{zzz}) = 0, \quad F_{t\eta} - \nu(4\eta F_{\eta\eta\eta} + 4F_{\eta\eta} + F_{\eta z z}) = 0 \quad (73)$$

Подстановка равенств (71) и (73) в уравнения (69) и (70) приводит к уравнениям

$$2(F_\eta F_{zz} - F_z F_{\eta z}) + (\lambda^2 F^2 + F_z^2)/\eta = (2/\rho)\eta p_\eta, \quad (74)$$

$$F_\eta F_{\eta z} - F_z F_{\eta\eta} = 0. \quad (75)$$

Таким образом, приходим к трем уравнениям (72), (74) и (75).

Будем искать их частные решения в виде

$$F = U(t, \eta) \sin(\lambda z + \delta), \quad \delta = \text{const}, \quad (76)$$

где  $U(t, \eta)$  - некоторая дифференцируемая функция.

Подставляя выражения (76) в уравнения (72), (74) и (75), получаем

$$U_t - \nu(4\eta U_{\eta\eta} - \lambda^2 U) = 0, \quad (77)$$

$$(2/\rho)\eta p_\eta = -\lambda^2 U(2U_\eta - U/\eta), \quad (78)$$

$$U_\eta^2 - UU_{\eta\eta} = 0. \quad (79)$$

Рассмотрим уравнение (78). Из него находим

$$p_\eta = -\frac{\rho\lambda^2}{2} \left( \frac{(U^2)_\eta}{\eta} - \frac{U^2}{\eta^2} \right) = -\frac{\rho\lambda^2}{2} (U^2/\eta)_\eta. \quad (80)$$

Принимая во внимание (71) и соотношение  $\eta = r^2$  в (67), из уравнения (80) приходим к следующему выражению для давления  $p$ :

$$p = p_*(t) - \frac{\rho\lambda^2 U^2}{2r^2}, \quad (81)$$

где  $p_*(t)$  - некоторая непрерывная и положительная функция.

Рассмотрим теперь уравнение (79). Оно может быть переписано как

$$U_{\eta\eta}/U_\eta = U_\eta/U, \quad U = U(t, \eta). \quad (82)$$

Интегрируя это уравнение по переменной  $\eta$ , находим

$$U = h(t) \exp(f(t)\eta), \quad (83)$$

где  $f(t)$  и  $h(t)$  - произвольные функции.

Подставим выражение (83) для функции  $U(t, \eta)$  в уравнение (77). Тогда получим

$$\dot{h} + hf\dot{\eta} - \nu h(4rf^2 - \lambda^2) = 0. \quad (84)$$

Из этого уравнения находим

$$\dot{h} + \lambda^2 \nu h = 0, \quad \dot{f} = 4\nu f^2. \quad (85)$$

Уравнения (85) дают

$$h = h_0 \exp(-\lambda^2 \nu t), \quad f = -\frac{1}{4\nu t}, \quad h_0 = \text{const}, \quad (86)$$

где  $t = 0$  отвечает сингулярности функции  $f(t)$ .

В результате получаем

$$U = h_0 \exp\left(-\lambda^2 \nu t - \frac{r^2}{4\nu t}\right), \quad (87)$$

$$F = h_0 \exp\left(-\lambda^2 \nu t - \frac{r^2}{4\nu t}\right) \sin(\lambda z + \delta), \quad A = \lambda F. \quad (88)$$

Используя формулы (5), (63) и (88), приходим к следующим формулам для компонент  $v_i$  вектора скорости:

$$v_1 = -\frac{\lambda h_0}{r^2} [\sin(\lambda z + \delta)y + \cos(\lambda z + \delta)x] \exp\left(-\lambda^2 \nu t - \frac{r^2}{4\nu t}\right), \quad (89)$$

$$v_2 = \frac{\lambda h_0}{r^2} [\sin(\lambda z + \delta)x - \cos(\lambda z + \delta)y] \exp\left(-\lambda^2 \nu t - \frac{r^2}{4\nu t}\right), \quad (90)$$

$$v_3 = -\frac{h_0}{2\nu t} \sin(\lambda z + \delta) \exp\left(-\lambda^2 \nu t - \frac{r^2}{4\nu t}\right). \quad (91)$$

Формулы (81) и (87) дают

$$p = p_*(t) - \frac{\rho \lambda^2 h_0^2}{2r^2} \exp\left(-2\lambda^2 \nu t - \frac{r^2}{2\nu t}\right), \quad (92)$$

где  $p_*(t)$  может быть произвольной положительной функцией.

Полученное решение обладает следующими свойствами при  $t > 0$ :

1) Функции  $v_i$  экспоненциально стремятся к нулю при  $r \rightarrow \infty$  и при  $t \rightarrow +\infty$ , когда  $\lambda \neq 0$ , и имеют синусоидальную зависимость от координаты  $z$ .

2) При  $t \rightarrow 0+$  и  $r \neq 0$  функции  $v_i$  стремятся к нулю.

3) Как следует из (92), функция  $p \rightarrow -\infty$  при  $r \rightarrow 0$ . Это означает, что радиальная координата  $r$  должна быть положительной, чтобы давления  $p$  в рассматриваемой жидкости были положительными. Более того, координата  $r$  для ее точек должна удовлетворять неравенству  $r \geq r_0(t) > 0$ . Здесь величины  $r = r_0(t)$  отвечают достаточно малой положительной величине давления  $p$  в жидкости,

при котором начинает возникать явление кавитации. В этом случае нарушается непрерывность в течении жидкости и возникает полость, заполненная ее паром.

Следовательно, полученное решение (89)-(92) применимо к области, занимаемой жидкостью и удовлетворяющей неравенству  $r \geq r_0(t) > 0$ . Что касается области  $r < r_0(t)$ , то она соответствует полости, заполненной паром данной жидкости.

Из (92) находим, что функция  $r_0(t)$  должна удовлетворять равенству

$$p_*(t) - \frac{\rho \lambda^2 h_0^2}{2r_0^2(t)} \exp\left(-2\lambda^2 \nu t - \frac{r_0^2(t)}{2\nu t}\right) = p_{\text{cav}}, \quad (93)$$

где  $p_{\text{cav}}$  - малое положительное давление, при котором в жидкости начинает проявляться кавитация. Величина  $p_{\text{cav}}$  равна давлению насыщенного пара жидкости.

Рассмотрим  $t > 0$  и допустим, что  $p_*(t) > p_{\text{cav}}$ . Тогда уравнение (93) имеет решение  $r_0(t) > 0$ , так как функция  $p$  в (92) становится большей чем  $p_{\text{cav}}$  при достаточно больших  $r$  и меньшей чем  $p_{\text{cav}}$  при достаточно малых  $r$ . Более того, положительная функция  $r_0(t)$ , удовлетворяющая уравнению (93), является единственной, так как выражение (92) – возрастающая функция от  $r$  при любом  $t > 0$ .

Функция  $r_0(t)$ , как показывает анализ, имеет следующие асимптотики:

$$r_0(t) = O\left(\sqrt{t \ln(1/t)}\right), \quad t \rightarrow 0+ \quad (94)$$

и, значит,  $r_0(0) = 0$  и

$$r_0(t) = \sqrt{\frac{\rho}{2(p_*(+\infty) - p_{\text{cav}})}} |\lambda h_0| \exp(-\lambda^2 \nu t), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (95)$$

## 2. Новые классы решений классических уравнений Янга–Миллса

### 2.1. Стационарное сферически симметричное решение уравнений Янга–Миллса

Обратимся к уравнениям Янга–Миллса с  $SU(2)$  симметрией, играющих важную роль в квантовой теории физических полей. Они могут быть представлены в виде<sup>3</sup>

$$\partial_\mu F^{k,\mu\nu} + g \varepsilon_{klm} F^{l,\mu\nu} A_\mu^m = (4\pi/c) J^{k,\nu}, \quad (96)$$

$$F^{k,\mu\nu} = \partial^\mu A^{k,\nu} - \partial^\nu A^{k,\mu} - g \varepsilon_{klm} A^{l,\mu} A^{m,\nu}, \quad (97)$$

<sup>3</sup> Райдер Л. Квантовая теория поля. – М.: Мир, 1987.



где  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ,  $k, l, m = 1, 2, 3$ ,  $A^{k,\mu}, F^{k,\mu\nu}$  - соответственно потенциалы и напряженности поля Янга–Миллса,  $\varepsilon_{klm}$  - антисимметрический тензор,  $\varepsilon_{123} = 1$ ,  $g$  - константа электрослабых взаимодействий,  $J^{k,\nu}$  - три 4-вектора плотностей токов.

Рассмотрим уравнения (96)-(97) в случае многочастичных источников, для которых может быть применено квазиклассическое приближение и для которых источники поля имеют вид

$$J^{1,\nu} = J^\nu, J^{2,\nu} = J^{3,\nu} = 0, \quad (98)$$

где  $J^\nu$  - классический 4-вектор плотности тока.

Тогда уравнения Янга–Миллса при потенциалах  $A^{2,\nu} = A^{3,\nu} = 0$  будут переходить в уравнения Максвелла относительно потенциалов  $A^{1,\nu}$ . Поэтому они могут рассматриваться как нелинейное обобщение уравнений Максвелла.

Рассмотрим нетривиальные решения уравнений Янга–Миллса (96)-(97) с источниками (98) в стационарном сферически–симметричном случае:

$$\begin{aligned} J^{1,0} &= c\theta(r), J^{1,l} = 0, l = 1, 2, 3, \\ J^{2,\nu} &= J^{3,\nu} = 0, r \equiv ((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)^{1/2}, \end{aligned} \quad (99)$$

где  $\theta(r)$  - плотность заряда источника,  $x^1, x^2, x^3$  - декартовы координаты с началом в центре источника,  $r$  - расстояние от точки источника до его центра.

В этом случае решения данных уравнений можно искать в виде

$$\begin{aligned} A^{k,0} &= 0, A^{1,l} = x^l[u(r)x^0 + u_0(r)], k, l = 1, 2, 3, \\ A^{2,l} &= x^l[v(r)x^0 + v_0(r)], A^{3,l} = x^l[w(r)x^0 + w_0(r)], x^0 = ct, \end{aligned} \quad (100)$$

где  $u, u_0, v, v_0, w, w_0$  - некоторые функции от  $r$  и  $t$  - время.

Тогда из формулы (97) для напряженностей поля найдем

$$\begin{aligned} F^{1,0l} &= x^l u(r), F^{2,0l} = x^l v(r), F^{3,0l} = x^l w(r), \\ F^{k,ml} &= 0, k, m, l = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (101)$$

Формулы (101) означают, что напряженности данного поля Янга–Миллса являются стационарными, однако им отвечают нестационарные потенциалы вида (100).

Подставляя выражения (100) и (101) в уравнения Янга–Миллса (96), получаем следующую систему уравнений:

$$ru' + 3u + gr^2(wv_0 - vw_0) = -4\pi\theta, \quad (102)$$

$$rv' + 3v + gr^2(uw_0 - wu_0) = 0, rw' + 3w + gr^2(vu_0 - uv_0) = 0. \quad (103)$$

Выражая  $w_0$  и  $v_0$  из уравнений (103) и подставляя в (102), приходим к уравнению

$$r(u^2 + v^2 + w^2)' + 6(u^2 + v^2 + w^2) = -8\pi\theta u, \quad (104)$$

являющемуся единственным дифференциальным соотношением, которому должны удовлетворять три функции  $u(r)$ ,  $v(r)$  и  $w(r)$ .

Функции, удовлетворяющие этому уравнению, можно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned} u &= -R(q) \cos \xi(q) / r^3, \\ v &= -R(q) \sin \xi(q) \cos \eta(q) / r^3, \quad w = -R(q) \sin \xi(q) \sin \eta(q) / r^3, \end{aligned} \quad (105)$$

$$R(q) = \int_0^q \cos \xi(q) dq, \quad q = 4\pi \int_0^r r^2 \theta(r) dr, \quad (106)$$

где  $q = q(r)$  представляет собой заряд сферической области, ограниченной радиусом  $r$ , и  $\xi(q)$  и  $\eta(q)$  являются произвольными дифференцируемыми функциями.

Для выделения однозначного решения изучаемых уравнений рассмотрим наряду с компонентами плотности 4-тока источника  $J^{k,\nu}$  также следующие компоненты:

$$I^{k,\nu} = J^{k,\nu} - (gc / 4\pi) \varepsilon_{klm} F^{l,\mu\nu} A_\mu^m, \quad (107)$$

которые, как следует из (96), удовлетворяют дифференциальному уравнению сохранения  $\partial_\nu I^{k,\nu} = 0$  и потому могут быть отождествлены с компонентами плотности полного 4-тока. Используя их, можно добавить следующее релятивистски-инвариантное условие к уравнениям Янга–Миллса:

$$I^{k,\nu} I_{k,\nu} = J^{k,\nu} J_{k,\nu}, \quad (108)$$

выражающее сохранение собственной энергии в источнике.

Применение условия (108), а также условия равноправия осей с  $k=2$  и  $k=3$  в калибровочном пространстве, позволяет найти конкретные выражения для функций  $\xi(q)$  и  $\eta(q)$ , которые приобретают вид

$$\xi(q) = q / K_0, \quad \eta(q) = \pi / 4, \quad K_0 = \text{const}. \quad (109)$$

Тогда для ненулевых компонентов напряженности поля  $F^{1,l0}$  находим

$$F^{1,l0} = K \sin(q / K) x^l / r^3, \quad K = K_0 / 2, \quad l = 1, 2, 3, \quad (110)$$

где  $q = q(r)$  определяется по формуле, указанной в (106).

## 2.2. Решение уравнений Янга-Миллса для нестационарных сферически симметрических источников

В диссертации проведено исследование уравнений Янга–Миллса (115)-(116) с источниками вида

$$\begin{aligned} (4\pi / c) J^{1,0} &= j^0(t, r), \quad (4\pi / c) J^{1,l} = x^l j(t, r), \quad l = 1, 2, 3, \\ J^{2,\nu} &= J^{3,\nu} = 0, \quad t = x^0 / c, \quad r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2, \end{aligned} \quad (111)$$

где  $t$  - время и  $r$  - расстояние от центра источника.

Потенциалы поля ищутся в виде

$$\begin{aligned} A^{1,0} &= \alpha^0(t, r), \quad A^{2,0} = \beta^0(t, r), \quad A^{3,0} = \gamma^0(t, r), \\ A^{1,l} &= x^l \alpha(t, r), \quad A^{2,l} = x^l \beta(t, r), \quad A^{3,l} = x^l \gamma(t, r). \end{aligned} \quad (112)$$

Тогда из (97) получаем следующие выражения для напряженностей поля:

$$\begin{aligned} F^{k,ml} &= 0, \quad k, m, l = 1, 2, 3, \\ F^{1,0l} &= x^l u(t, r), \quad F^{2,0l} = x^l v(t, r), \quad F^{3,0l} = x^l w(t, r), \end{aligned} \quad (113)$$

где

$$\begin{aligned} u &= (1/c) \partial \alpha / \partial t + (1/r) \partial \alpha^0 / \partial r + g(\gamma^0 \beta - \beta^0 \gamma), \\ v &= (1/c) \partial \beta / \partial t + (1/r) \partial \beta^0 / \partial r + g(\alpha^0 \gamma - \gamma^0 \alpha), \\ w &= (1/c) \partial \gamma / \partial t + (1/r) \partial \gamma^0 / \partial r + g(\beta^0 \alpha - \alpha^0 \beta). \end{aligned} \quad (114)$$

Уравнение Янга–Миллса (96) приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} r \partial u / \partial r + 3u + gr^2(w\beta - v\gamma) &= -j^0, \\ r \partial v / \partial r + 3v + gr^2(u\gamma - w\alpha) &= 0, \\ r \partial w / \partial r + 3w + gr^2(v\alpha - u\beta) &= 0, \end{aligned} \quad (115)$$

$$\begin{aligned} (1/c) \partial u / \partial t + g(v\gamma^0 - w\beta^0) &= j, \\ (1/c) \partial v / \partial t + g(w\alpha^0 - u\gamma^0) &= 0, \\ (1/c) \partial w / \partial t + g(u\beta^0 - v\alpha^0) &= 0. \end{aligned} \quad (116)$$

Как известно, следствием уравнений Янга–Миллса являются соотношения  $D_\nu J^{k,\nu} = 0$ , где  $D_\nu$  - ковариантная производная Янга–Миллса. Это приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} (1/c) \partial j^0 / \partial t + r \partial j / \partial r + 3j &= 0, \\ j^0 \beta^0 - r^2 j \beta = 0, \quad j^0 \gamma^0 - r^2 j \gamma &= 0. \end{aligned} \quad (117)$$

Рассматриваемые источники поля инвариантны относительно их калибровочного вращения относительно первой оси. Поэтому выбором калибровки можно обеспечить также выполнение условия

$$j^0 \alpha^0 - r^2 j \alpha = 0. \quad (118)$$

Умножим уравнения в (115) на  $j$  и сложим с соответствующими уравнениями из (116), умноженными на  $j^0$ . Тогда применяя соотношения (117) и (118) для потенциалов, приходим к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} (1/c) j^0 \partial u / \partial t + j(r \partial u / \partial r + 3u) &= 0, \\ (1/c) j^0 \partial v / \partial t + j(r \partial v / \partial r + 3v) &= 0, \\ (1/c) j^0 \partial w / \partial t + j(r \partial w / \partial r + 3w) &= 0. \end{aligned} \quad (119)$$

Умножая три уравнения в (115) соответственно на  $u, v, w$  и затем складывая их, найдем

$$u(r \partial u / \partial r + 3u) + v(r \partial v / \partial r + 3v) + w(r \partial w / \partial r + 3w) = -j^0 u. \quad (120)$$

Применение уравнений (107)-(108) дает соотношение

$$(r\partial u/\partial r + 3u)^2 + (r\partial v/\partial r + 3v)^2 + (r\partial w/\partial r + 3w)^2 - (r/c)^2[(\partial u/\partial t)^2 + (\partial v/\partial t)^2 + (\partial w/\partial t)^2] = (j^0)^2 - r^2 j^2. \quad (121)$$

Анализ уравнений (119) показывает, что они имеют точное решение вида

$$u = P(q)/r^3, \quad v = Q(q)/r^3, \quad w = S(q)/r^3, \quad q = \int_0^r r^2 j^0(t, r) dr, \quad (122)$$

где  $P, Q, S$  - дифференцируемые функции аргумента  $q$ , представляющего собой заряд сферической области радиуса  $r$  в момент  $t$ .

Подстановка (122) в уравнения (120) и (121) дает

$$PdP/dq + QdQ/dq + SdS/dq = -P. \quad (123)$$

$$(dP/dq)^2 + (dQ/dq)^2 + (dS/dq)^2 = 1. \quad (124)$$

Для уравнений (123) и (124) находим следующее решение, учитывающее равноправие второй и третьей оси в калибровочном пространстве:

$$P(q) = K \sin(q/K), \quad Q(q) = S(q) = 2^{-1/2} K[1 - \cos(q/K)], \quad (125)$$

где  $K$  - константа, введенная в предыдущем разделе.

Полученные формулы позволяют обобщить найденное выше стационарное решение со сферической симметрией на нестационарный сферически-симметричный случай.

### 2.3. Осесимметричные волновые решения уравнений Янга–Миллса

Обратимся к осесимметричным волновым решениям уравнений Янга–Миллса (96)-(97) вне источников поля, где  $J^{k,v} = 0$ . Они ищутся в виде

$$\begin{aligned} A^{k,0} &= \alpha^{k,0}, \quad A^{k,1} = (\alpha^{k,1}x + \alpha^{k,2}y)/\rho, \\ A^{k,2} &= (\alpha^{k,1}y - \alpha^{k,2}x)/\rho, \quad A^{k,3} = \alpha^{k,3}, \\ \alpha^{k,v} &= \alpha^{k,v}(\tau, \rho, z), \quad \tau \equiv x^0, \quad \rho = (x^2 + y^2)^{1/2}, \\ &x = x^1, \quad y = x^2, \quad z = x^3. \end{aligned} \quad (126)$$

Тогда для напряженностей поля находим

$$\begin{aligned} F^{k,01} &= (f^{k,1}x + f^{k,2}y)/\rho, \quad F^{k,02} = (f^{k,1}y - f^{k,2}x)/\rho, \quad F^{k,03} = f^{k,3}, \\ F^{k,12} &= f^{k,4}, \quad F^{k,13} = (f^{k,5}x + f^{k,6}y)/\rho, \quad F^{k,23} = (f^{k,5}y - f^{k,6}x)/\rho, \\ &f^{k,q} = f^{k,q}(\tau, \rho, z), \quad q = 1, 2, \dots, 6, \end{aligned} \quad (127)$$

где

$$\begin{aligned} f^{k,1} &= \alpha_\tau^{k,1} + \alpha_\rho^{k,0} - g\varepsilon_{klm}\alpha^{l,0}\alpha^{m,1}, \quad f^{k,2} = \alpha_\tau^{k,2} - g\varepsilon_{klm}\alpha^{l,0}\alpha^{m,2}, \\ f^{k,3} &= \alpha_\tau^{k,3} + \alpha_z^{k,0} - g\varepsilon_{klm}\alpha^{l,0}\alpha^{m,3}, \quad f^{k,4} = \alpha_\rho^{k,2} + \alpha^{k,2}/\rho + g\varepsilon_{klm}\alpha^{l,1}\alpha^{m,2}, \\ f^{k,5} &= \alpha_z^{k,1} - \alpha_\rho^{k,3} - g\varepsilon_{klm}\alpha^{l,1}\alpha^{m,3}, \quad f^{k,6} = \alpha_z^{k,2} - g\varepsilon_{klm}\alpha^{l,2}\alpha^{m,3}, \\ \alpha_\tau^{k,v} &\equiv \partial\alpha^{k,v}/\partial\tau, \quad \alpha_\rho^{k,v} \equiv \partial\alpha^{k,v}/\partial\rho, \quad \alpha_z^{k,v} \equiv \partial\alpha^{k,v}/\partial z. \end{aligned} \quad (128)$$

В рассматриваемом случае  $J^{k,\nu} = 0$  уравнение (96) Янга–Миллса дает

$$\begin{aligned} f_{\rho}^{k,1} + f^{k,1} / \rho + f_z^{k,3} - g\varepsilon_{klm}(f^{l,1}\alpha^{m,1} + f^{l,2}\alpha^{m,2} + f^{l,3}\alpha^{m,3}) &= 0, \\ f_{\tau}^{k,1} - f_z^{k,5} + g\varepsilon_{klm}(f^{l,1}\alpha^{m,0} - f^{l,4}\alpha^{m,2} + f^{l,5}\alpha^{m,3}) &= 0, \\ f_{\tau}^{k,2} - f_{\rho}^{k,4} - f_z^{k,6} + g\varepsilon_{klm}(f^{l,2}\alpha^{m,0} + f^{l,4}\alpha^{m,1} + f^{l,6}\alpha^{m,3}) &= 0, \\ f_{\tau}^{k,3} + f_{\rho}^{k,5} + f^{k,5} / \rho - g\varepsilon_{klm}(f^{l,5}\alpha^{m,1} + f^{l,6}\alpha^{m,2} - f^{l,3}\alpha^{m,0}). \end{aligned} \quad (129)$$

Компоненты потенциалов  $\alpha^{k,\nu}$ , удовлетворяющие системе уравнений (129), ищутся в виде

$$\begin{aligned} \alpha^{1,0} = 0, \quad \alpha^{2,0} = P(\eta, \rho), \quad \alpha^{3,0} = Q(\eta, \rho), \quad \eta = \tau - z, \\ \alpha^{1,2} = \varphi(\rho) / g, \quad \alpha^{2,2} = \alpha^{3,2} = 0, \quad \alpha^{k,1} = 0, \quad \alpha^{k,3} = \alpha^{k,0}, \end{aligned} \quad (130)$$

где  $P(\eta, \rho)$ ,  $Q(\eta, \rho)$  и  $\varphi(\rho)$  - некоторые дифференцируемые функции.

Тогда из (128) находим

$$\begin{aligned} f^{1,1} = 0, \quad f^{2,1} = P_{\rho}, \quad f^{3,1} = Q_{\rho}, \quad f^{1,2} = 0, \quad f^{2,2} = -\varphi Q, \quad f^{3,2} = \varphi P, \\ f^{k,3} = 0, \quad f^{1,4} = (\varphi' + \varphi / \rho) / g, \quad f^{2,4} = f^{3,4} = 0, \quad f^{k,5} = -f^{k,1}, \quad f^{k,6} = -f^{k,2}. \end{aligned} \quad (131)$$

Подставляя (130) и (131) в уравнения (129), находим

$$P_{\rho\rho} + P_{\rho} / \rho - \varphi^2 P = 0, \quad Q_{\rho\rho} + Q_{\rho} / \rho - \varphi^2 Q = 0, \quad (\varphi' + \varphi / \rho)' = 0. \quad (132)$$

Уравнения (132) имеют следующие решения, стремящиеся к нулю при  $\rho \rightarrow \infty$ :

$$\varphi = b / \rho, \quad P = G(\tau - z) / \rho^{|b|}, \quad Q = H(\tau - z) / \rho^{|b|}, \quad \tau \equiv x^0, \quad (133)$$

где  $G$  и  $H$  - произвольные дифференцируемые функции и  $b$  - произвольная ненулевая константа.

В результате получаем класс осесимметричных волновых решений уравнений Янга–Миллса, описываемый формулами (130), (131) и (133).

## 2.4. Неабелевые расходящиеся волны

В диссертации исследуются неабелевые расходящиеся волны, излучаемые космическими источниками полей Янга–Миллса в случае  $N$ -параметрической калибровочной группы. Вне своих источников поля Янга–Миллса описываются уравнениями<sup>4</sup>

$$\partial_{\mu} F^{a,\mu\nu} + f_{abc} A_{\mu}^b F^{c,\mu\nu} = 0, \quad (134)$$

$$F^{a,\mu\nu} = \partial^{\mu} A^{a,\nu} - \partial^{\nu} A^{a,\mu} + f_{abc} A^{b,\mu} A^{c,\nu}, \quad (135)$$

где  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ,  $a, b, c = 1, 2, \dots, N$ ,  $A^{a,\nu}$  и  $F^{a,\mu\nu}$  - соответственно потенциалы и напряженности поля Янга–Миллса,  $f_{abc}$  - структурные константы  $N$ -параметрической

<sup>4</sup> Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. – М.: Наука, 1988.

калибровочной группы и  $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$ , где  $x^\mu$  - прямоугольные пространственно-временные координаты геометрии Минковского.

Волновые решения уравнений (134)-(135) ищутся в виде

$$A^{a,0} = u^a(y_0, y_1, y_2, y_3), \quad A^{a,l} = (x^l/r)A^{a,0}, \quad y_0 = x^0 - r, \quad y_l = x^l, \quad (136)$$

$$l = 1, 2, 3, \quad a = 1, 2, \dots, N, \quad r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2},$$

где  $u^a$  - некоторые функции волновой фазы  $y_0 = x^0 - r$  и пространственных координат  $y_l = x^l$ .

В дальнейшем изучается наиболее интересный с точки зрения физических приложений случай калибровочных групп с компактной полупростой алгеброй Ли, которому соответствуют полностью антисимметричные структурные константы  $f_{abc}$ . Тогда после подстановки выражений (136) в формулу (135) для напряженностей поля Янга-Миллса находим

$$F^{a,0n} = \partial u^a / \partial y_n, \quad F^{a,in} = (1/r)(y_i \partial u^a / \partial y_n - y_n \partial u^a / \partial y_i), \quad i, n = 1, 2, 3. \quad (137)$$

Подставим формулы (136) и (137) в уравнение (134) и введем обозначения

$$p^a = \sum_{i=1}^3 y_i \frac{\partial u^a}{\partial y_i}, \quad q^a = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u^a}{\partial y_i^2}. \quad (138)$$

Тогда в результате вычислений придем к следующим уравнениям:

$$q^a = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial p^a}{\partial y_0} + f_{abc} u^b p^c \right), \quad r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}, \quad (139)$$

$$y_n \frac{p^a}{r^2} + \frac{\partial p^a}{\partial y_n} = 0, \quad n = 1, 2, 3. \quad (140)$$

Уравнения (140) имеют решения

$$p^a = s^a(y_0)/r, \quad (141)$$

где  $s^a$  - произвольные дифференцируемые функции аргумента  $y_0$ .

Из (138), (139) и (141) приходим к следующим уравнениям:

$$\sum_{i=1}^3 y_i \frac{\partial u^a}{\partial y_i} = \frac{s^a(y_0)}{r}, \quad (142)$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u^a}{\partial y_i^2} = \frac{1}{r^2} (\dot{s}^a(y_0) + f_{abc} u^b s^c(y_0)), \quad \dot{s}^a(y_0) \equiv \frac{ds^a}{dy_0}. \quad (143)$$

Уравнение (142), как нетрудно проверить, имеет решение

$$u^a = -s^a(y_0)/r + g^a(y_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad \xi_i = y_i/r, \quad (144)$$

где  $g^a$  - произвольные дифференцируемые функции.

Используя (144), уравнения (143) могут быть представлены в виде

$$\sum_{i=1}^3 \left[ (1 - \xi_i^2) \frac{\partial^2 g^a}{\partial \xi_i^2} - 2\xi_i \frac{\partial g^a}{\partial \xi_i} \right] - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^3 \xi_i \xi_k \frac{\partial^2 g^a}{\partial \xi_i \partial \xi_k} = \dot{s}^a(y_0) + f_{abc} g^b s^c(y_0), \quad (145)$$

где  $\xi_i = y_i / r$  удовлетворяют соотношению

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1. \quad (146)$$

Учитывая это соотношение, аргументы  $\xi_i$  функций  $g^a$  можно выразить через два независимых аргумента. В качестве них удобно выбрать следующие величины  $\theta$  и  $\sigma$ :

$$g^a(y_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = h^a(y_0, \theta, \sigma), \quad \theta = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \xi_1}{1 - \xi_1} \right), \quad \sigma = \arctg \left( \frac{\xi_2}{\xi_3} \right). \quad (147)$$

Тогда уравнения (145), как показывают вычисления, приобретают вид

$$\frac{\partial^2 h^a}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 h^a}{\partial \sigma^2} = (1 - \text{th}^2 \theta) (\dot{s}^a(y_0) + f_{abc} h^b s^c(y_0)). \quad (148)$$

Положим

$$h^a = v^a(y_0, \theta, \sigma) + \kappa(y_0) s^a(y_0) \ln(\text{ch} \theta) + d^a(y_0) \quad (149)$$

и выберем  $(N+1)$  функцию  $\kappa(y_0)$  и  $d^a(y_0)$  так, чтобы выполнялись  $N$  равенств

$$\dot{s}^a(y_0) - \kappa(y_0) s^a(y_0) + f_{abc} d^b(y_0) s^c(y_0) = 0. \quad (150)$$

Умножая равенства (150) на  $s^a$  и суммируя по индексу  $a$ , имеем

$$\kappa = \dot{s} / s, \quad s^2 = \sum_{a=1}^N (s^a)^2, \quad \dot{s} = ds / dy_0. \quad (151)$$

Из уравнений (148)-(150) получим

$$\frac{\partial^2 v^a}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v^a}{\partial \sigma^2} = (1 - \text{th}^2 \theta) f_{abc} v^b(y_0) s^c(y_0), \quad v^a = v^a(y_0, \theta, \sigma). \quad (152)$$

Рассмотрим эти уравнения. Их решения будем искать в виде действительной части следующей суммы:

$$v^a(y_0, \theta, \sigma) = \text{Re} \sum_{n=0}^M V_n^a(y_0, \theta) \exp(-n(\theta + i\sigma)), \quad (153)$$

где  $V_n^a(y_0, \theta)$  - некоторые комплексные функции и  $n, M$  - неотрицательные целые числа. Тогда подставляя (153) в уравнения (152), приходим к уравнениям

$$\frac{\partial^2 V_n^a}{\partial \theta^2} - 2n \frac{\partial V_n^a}{\partial \theta} = (1 - \text{th}^2 \theta) f_{abc} V_n^b s^c(y_0). \quad (154)$$

Решение уравнений (154) представим в виде

$$V_n^a = V_n^a(y_0, \eta), \quad \eta = \frac{1}{2}(1 - \text{th} \theta). \quad (155)$$

Тогда из (154) получим

$$\eta(\eta - 1) \frac{\partial^2 V_n^a}{\partial \eta^2} - (n + 1 - 2\eta) \frac{\partial V_n^a}{\partial \eta} + f_{abc} V_n^b s^c(y_0) = 0. \quad (156)$$

Решение уравнений (156) будем искать в виде следующего ряда по степеням  $\eta$ :

$$V_n^a = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{j,n}^a(y_0) \eta^j, \quad (157)$$

где  $\lambda_{j,n}^a(y_0)$  - некоторые комплексные функции.

Тогда находим, что функции  $\lambda_{j,n}^a(y_0)$  удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\lambda_{j+1,n}^a = \frac{j(j+1)\lambda_{j,n}^a + f_{abc}\lambda_{j,n}^b s^c}{(j+1)(j+1+n)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (158)$$

где комплексные функции  $\lambda_{0,n}^a = \lambda_{0,n}^a(y_0)$  могут быть выбраны произвольно.

Нетрудно убедиться, исходя из рекуррентного соотношения (158), что последовательность  $|\lambda_{j,n}^a(y_0)|$  является ограниченной для любых  $y_0$ . Отсюда вытекает абсолютная сходимость ряда (157) при  $\eta < 1$  ( $\theta > -\infty$ ).

В результате применения формул (153), (155), (157) и (158) находим функции  $v^a(y_0, \theta, \sigma)$ , которые позволяют определить и функции  $u^a(y_0, y_1, y_2, y_3)$ , где  $y_0 = x^0 - r$ ,  $y_l = x^l$ ,  $l = 1, 2, 3$ . После этого формулы (136) и (137) дают искомые выражения для потенциалов и напряженностей неабелевых волновых решений. Они определяются  $N$  произвольными комплексными функциями  $\lambda_{0,n}^a(y_0)$ .

При  $s^a(y_0) \neq 0$  эти неабелевые волновые решения содержат продольные компоненты. Данное обстоятельство может быть использовано для поиска космических источников полей Янга-Миллса.

Подставим теперь ряд (157) в формулу (153) и учтем выражения (147) и (155) для  $\theta$ ,  $\sigma$  и  $\eta$ . Тогда приходим к формуле

$$v^a = \text{Re} \sum_{m=0}^M \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{j,n}^a(x^0 - r) \frac{(r - x^1)^j (x^2 + ix^3)^n}{(2r)^j (r + x^1)^n}, \quad (159)$$

где  $\lambda_{j,n}^a$  удовлетворяют рекуррентному соотношению (158).

### 3. Исследование нелинейных уравнений релятивистского движения частиц под действием юкавского и кулоновского потенциалов

#### 3.1. Классические уравнения движения релятивистских частиц под действием скалярного и векторного полей

Пусть релятивистская незаряженная частица с массой покоя  $m_0$  движется под действием скалярного поля с потенциалом  $\varphi$ . Будем ее рассматривать в классическом



приближении и для описания ее движения использовать принцип наименьшего действия. С этой целью применим следующее выражение для действия  $S$ :

$$S = -m_0 c \int_{t_1}^{t_2} \Phi(\varphi) ds, \quad \Phi(0) = 0, \quad (160)$$

где  $ds^2 = dx_n dx^n$ ,  $x^0 = ct$ ,  $x^1, x^2, x^3$  - пространственные координаты,  $t$  - время,  $c$  - скорость света,  $\Phi(\varphi)$  - некоторая функция потенциала  $\varphi$  и  $t_1, t_2$  - моменты времени, отвечающие фиксированным значениям координат частицы. Действие (160) является релятивистски-инвариантным и при  $\varphi = 0$  совпадает с хорошо известным классическим выражением<sup>5</sup>.

Варьируя (160) по траекториям  $x^n(s)$ , из принципа наименьшего действия:  $\delta S = 0$  находим, что в инерциальной системе координат

$$\Phi'(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x^n} - \frac{d}{ds} \left( \Phi(\varphi) \frac{dx_n}{ds} \right) = 0. \quad (161)$$

Эти уравнения могут быть представлены в рассматриваемой инерциальной системе как

$$\Phi(\varphi) \frac{d^2 x^n}{ds^2} + \Phi'(\varphi) \left( \frac{d\varphi}{ds} \frac{dx^n}{ds} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right) = 0, \quad (162)$$

где  $d\varphi/ds = \partial\varphi/\partial x^n dx^n/ds$ .

Рассмотрим нерелятивистский случай. Тогда уравнения (162) дают

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x^k}, \quad k = 1, 2, 3, \quad \Psi = c^2 \ln|\Phi(\varphi)|, \quad |dx^k/dt| \ll c. \quad (163)$$

С другой стороны, классические нерелятивистские уравнения для незаряженной частицы, движущейся под действием скалярного потенциала  $\varphi$ , должны иметь вид

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x^k}. \quad (164)$$

Из (163) и (164) находим, что функция  $\Psi$  должна быть отождествлена с потенциалом  $\varphi$ :

$$\Psi \equiv c^2 \ln|\Phi(\varphi)| = \varphi. \quad (165)$$

Так как  $\Phi(0) = 1$ , как указано в (160), из (166) находим

$$\Phi = \exp(\varphi/c^2). \quad (166)$$

<sup>5</sup> Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. – М.: Наука, 1967.

Рассмотрим теперь движение частицы с зарядом  $q$  под действием скалярного поля с потенциалом  $\varphi$  и векторного электромагнитного поля с потенциалами  $A_n$ ,  $n = 0, 1, 2, 3$ . В этом случае вместо действия (160), будем иметь действие:

$$S = -m_0 c \int_{t_1}^{t_2} \Phi(\varphi) ds - \frac{q}{c} \int_{t_1}^{t_2} A_n dx^n, \quad \Phi(\varphi) = \exp(\varphi/c^2). \quad (167)$$

Варьируя теперь действие  $S$  по траекториям  $x^n(s)$  и используя принцип наименьшего действия, приходим к следующим уравнениям в инерциальной системе отсчета:

$$m_0 \exp(\varphi/c^2) \left( c^2 \frac{d^2 x^n}{ds^2} + \frac{d\varphi}{ds} \frac{dx^n}{ds} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right) - q F_m^n \frac{dx^m}{ds} = 0, \quad (168)$$

где  $F_{mn} = \partial A_m / \partial x^n - \partial A_n / \partial x^m$  - тензор напряженностей векторного поля.

Умножим левую часть (168) на  $dx_n / ds$  и просуммируем по  $n$ . Тогда, как несложно убедиться, получаем тождественный нуль. Это означает, что первое уравнение ( $n=0$ ) в системе динамических уравнений (168) является следствием остальных трех уравнений ( $n=1,2,3$ ).

### 3.2. Движение релятивистской частицы в юкавском и кулоновском полях

Обратимся к движению релятивистской частицы с массой покоя  $m_0$  и зарядом  $q$  под действием юкавского потенциала  $\varphi$  и кулоновского потенциала  $A_0$ , создаваемых покоящимся сферическим источником с центром в начале пространственных координат.

Для данных потенциалов имеем

$$\varphi = -\frac{f}{r} \exp(-\mu r), \quad \mu > 0, \quad A_0 = \frac{h}{r}, \quad A_1 = A_2 = A_3 = 0, \quad (169)$$

Здесь  $f, h, \mu = \text{const}$  и  $r$  - расстояние от начала пространственных координат.

Пусть частица движется в плоскости  $x^3 = 0$ . Перейдем теперь к полярным координатам:  $r$  и  $\theta$ :

$$x^1 = r \cos \theta, \quad x^2 = r \sin \theta, \quad x^3 = 0. \quad (170)$$

Тогда левая часть последнего уравнения в (168) ( $n=3$ ) тождественно равна нулю, как и его правая часть, а при  $n=1,2$  уравнения (168) с учетом (169), приобретают, как показывают вычисления, следующий вид:

$$m_0 \exp(\varphi/c^2) \left[ \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 + \frac{f}{c^2} \frac{\exp(-\mu r)}{r^2} (1 + \mu r) (\dot{r}^2 + c^2) \right] = \frac{hq}{r^2} \sqrt{1 + (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)/c^2}, \quad (171)$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} + \frac{f}{c^2} \frac{\exp(-\mu r)\dot{r}}{r} \dot{\theta}(1 + \mu r) = 0, \quad (172)$$

где  $\dot{r} \equiv dr/d\tau$ ,  $\dot{\theta} \equiv d\theta/d\tau$  и  $\tau$  - собственное время для движущейся частицы:  $d\tau = ds/c$ .

Как было сказано выше, первое уравнение в (168) ( $n=0$ ) является следствием остальных трех уравнений ( $n=1,2,3$ ), то есть уравнений (171) и (172).

Из уравнения (172) находим первый интеграл

$$\dot{\theta} = \frac{D}{r^2} \exp \left[ \frac{f}{c^2} \int_r^\infty \frac{(1 + \mu r)}{r^2} \exp(-\mu r) dr \right], \quad D = \text{const}. \quad (173)$$

Как показывают вычисления, эту формулу можно представить в виде

$$\dot{\theta} = \frac{D}{r^2} \exp(-\varphi(r)/c^2), \quad \varphi(r) = -\frac{f}{r} \exp(-\mu r). \quad (174)$$

Перейдем теперь к функции  $r = r(\theta)$  и положим

$$\sigma = \frac{1}{r}. \quad (175)$$

Тогда получим после ряда вычислений, используя первый интеграл (174), что уравнение (171) приобретает форму

$$\begin{aligned} \sigma'' + \sigma - \frac{f}{D^2} (1 + \mu/\sigma) \exp(-\mu/\sigma + 2\varphi/c^2) + \\ + \frac{hq}{D^2 m_p} \exp(\varphi/c^2) \sqrt{1 + (D^2/c^2) \exp(-2\varphi/c^2) (\sigma'^2 + \sigma^2)} = 0, \end{aligned} \quad (176)$$

где  $\sigma = \sigma(\theta)$ ,  $\sigma' = d\sigma/d\theta$ ,  $\sigma'' = d^2\sigma/d\theta^2$  и  $\varphi = -f\sigma \exp(-\mu/\sigma)$ .

Перейдем к безразмерной форме данного уравнения, полагая

$$U = \frac{\sigma}{\mu}, \quad a = \frac{f}{\mu D^2}, \quad b = \frac{hq}{\mu m_0 D^2}, \quad g = \frac{f\mu}{c^2}. \quad (177)$$

Тогда из уравнения (176) получаем следующее уравнение относительно функции  $U = U(\theta)$ :

$$\begin{aligned} U'' + U + b \exp(-gU \exp(-1/U)) \times \\ \times \sqrt{1 + (g/a)(U'^2 + U^2) \exp(2gU \exp(-1/U))} = \\ = a(1 + 1/U) \exp(-1/U - 2gU \exp(-1/U)), \end{aligned} \quad (178)$$

### 3.3. Численное исследование периодических орбит релятивистских частиц в юкавском и кулоновском полях

Для уравнения (178) проводилась серия численных расчетов методом Рунге-Кутты четвертого порядка. Они осуществлялись при различных значениях параметров  $a$ ,  $b$ ,  $g$  и  $U_0 = U(0)$ . При этом полагалось  $U'(0) = 0$ . Тогда угол  $\theta = 0$  соответствует точке экстремума функции  $r(\theta)$ . Эти расчеты показали, что при определенных значениях параметров становится возможным движение релятивистских частиц в поле юкавских и кулоновских сил по замкнутым орбитам.

Ниже приведены некоторые из полученных численных результатов.

На рис. 1-3 изображены графики, показывающие зависимость безразмерного радиуса орбиты частицы  $\mu r = 1/U$  от полярного угла  $\theta$  в следующих трех случаях:

- 1)  $U_0 = 0.1$ ,  $a = 0.015$ ,  $b = -0.1$  и  $g = 0.9$ .
- 2)  $U_0 = 0.2$ ,  $a = 0.05$ ,  $b = -0.15$  и  $g = 0.1$ .
- 3)  $U_0 = 0.3$ ,  $a = 0.015$ ,  $b = -0.1$  и  $g = 0.9$ .

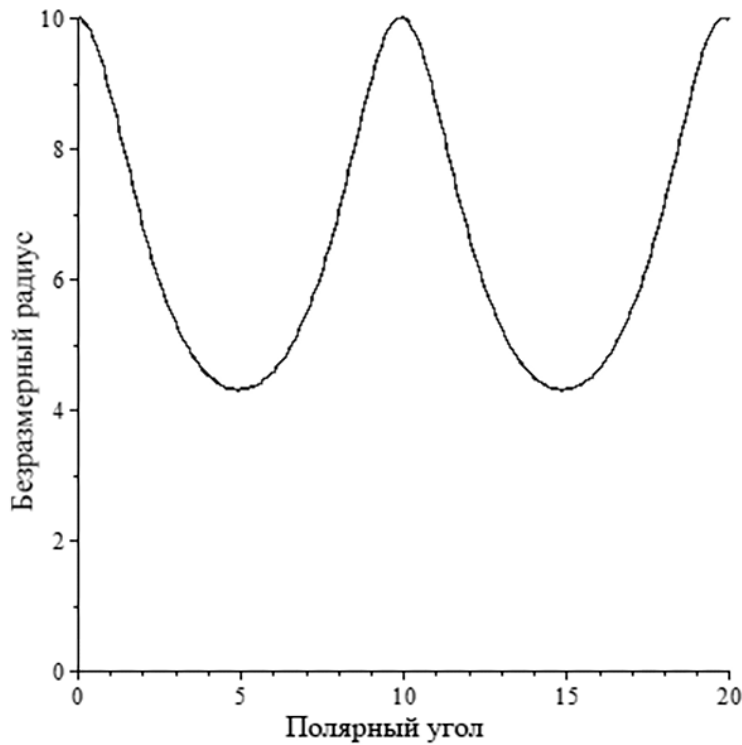


Рис. 1. Зависимость радиальной координаты частицы от полярного угла в случае 1

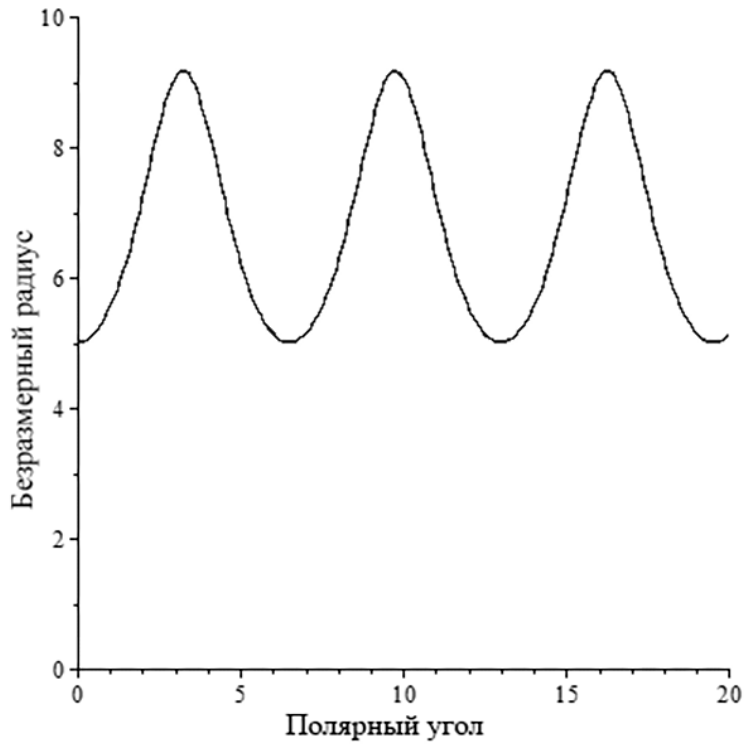


Рис. 2. Зависимость радиальной координаты частицы от полярного угла в случае 2

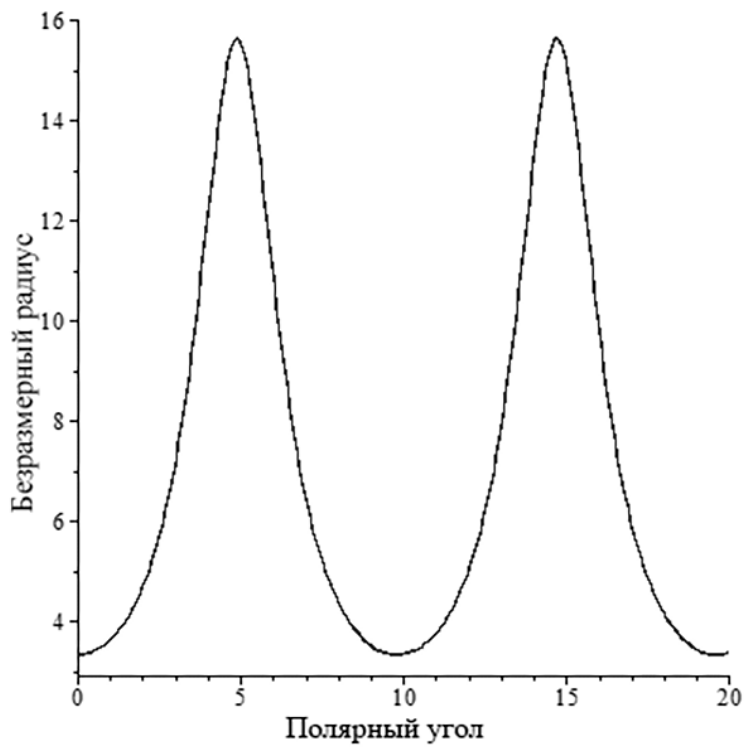


Рис. 3. Зависимость радиальной координаты частицы от полярного угла в случае 3

## ВЫВОДЫ

1. Найдены новые классы осесимметричных решений уравнений Навье-Стокса, представимых в виде степенных рядов по радиальной координате и проведено их исследование.
2. Найдено осесимметричное решение уравнений Навье-Стокса, экспоненциально затухающее при больших значениях радиальной координаты. Проведено его исследование при больших значениях числа Рейнольдса, когда становится возможным возникновение турбулентного течения вязкой жидкости.
3. Найдено осесимметричное решение уравнений Навье-Стокса, описывающее случай возникновения кавитации в вязкой жидкости.
4. Рассмотрены нелинейные дифференциальные уравнения классической теории Янга-Миллса. В случае  $SU(2)$  симметрии для них найдены новые типы стационарных и нестационарных сферически-симметричных решений.
5. Найдены новые классы волновых решений уравнений Янга-Миллса. Они включают некоторые типы осесимметричных неабелевых решений и неабелевых решений в виде расходящихся волн.
6. Проведено исследование динамических уравнений релятивистских частиц, движущихся в юкавском и кулоновском полях. Данная задача приведена к двум нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям 2-го и 1-го порядков. Проведено численное исследование этих уравнений при различных параметрах. Продемонстрирована возможность существования замкнутых орбит для движущихся в рассматриваемых полях релятивистских частиц.

## СПИСОК ОСНОВНЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### Статьи в рецензируемых журналах, индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus

1. Rabinowitch A. S. On a particular solution to the 3D Navier-Stokes equations for liquids with cavitation // Journal of Mathematical Physics, 2016, Vol. 57, No. 8, p. 083103-1 – 083103-6.
2. Rabinowitch A.S. On a particular analytical solution to the 3D Navier-Stokes equations for high Reynolds numbers // Journal of Mathematical Physics, 2015, Vol. 56, No. 9, p. 093101-1 – 093101-8.
3. Rabinowitch A.S. On some classes of nonstationary axially symmetric solutions to the Navier-Stokes equations // Journal of Mathematical Physics, 2014, Vol. 55, No. 9, p. 093102-1 – 093102-11.

4. Rabinowitch A.S. On a generalization of the Dirac equation for a description of the quark structure of nucleons // Russian Physics Journal, 2008, Vol. 51, No. 8 . p. 822-830.
5. Rabinowitch A.S. On a new class of non-Abelian expanding waves // Physics Letters B, 2008, Vol. 664, No. 5, p. 295–300.
6. Rabinowitch A.S. On non-Abelian expanding waves // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2007, Vol. 40, No. 48, p. 14575–14579.
7. Rabinowitch A.S. Yang-Mills Fields of Nonstationary Spherical Objects with Big Charges // Russian Journal of Mathematical Physics, 2008, Vol. 15, No. 3, p. 389-394.
8. Rabinowitch A.S. Exact axially symmetric wave solutions of the Yang-Mills equations // Theoretical and Mathematical Physics, 2006, Vol. 148, No. 2, p. 1081-1085.
9. Rabinowitch A.S. Yang-Mills Equations and Nonlinear Electrodynamics // Russian Journal of Mathematical Physics, 2005, Vol.12, No. 3, p. 379–385.
10. Rabinowitch A.S. Generalized Einstein gravitational theory with vacuum vectorial field // Classical and Quantum Gravity, 2003, Vol. 20, No. 7, p. 1389-1402.
11. Rabinowitch A.S. Modified Yang-Mills Theory and Electroweak Interactions // International Journal of Theoretical Physics, 2000, Vol. 39, No. 10, p. 2457–2466.
12. Rabinowitch A.S. Nuclear Forces and Neutron Stars // International Journal of Theoretical Physics, 1998, Vol. 37, No. 5, p. 1477–1489.
13. Rabinowitch A.S. Binding Energies of Nuclei // International Journal of Theoretical Physics, 1997, Vol. 36, No. 2, p. 533–544.
14. Rabinowitch A.S. Relativistic Theory of Nuclear Forces // International Journal of Theoretical Physics, 1994, Vol. 33, No. 10, p. 2049–2056.

#### **Статьи, опубликованные в российских рецензируемых журналах**

15. Рабинович А.С. О нестационарных решениях уравнений Янга-Миллса // Вестник РУДН, сер. Математика. Информатика. Физика, 2013, № 1, с. 274-283.
16. Рабинович А.С., Абакумов С.Ю. Нелинейная модель атмосферы Земли с учетом ракетных и спутниковых данных // Вестник РУДН, сер. Математика. Информатика. Физика, 2012, № 3, с. 129-137.
17. Рабинович А.С., Абакумов С.Ю. Исследование нелинейной модели верхней ионосферы Земли с учетом данных космических аппаратов // Вестник МГОУ, сер. Физика-Математика, 2012, № 3, с. 56-63.
18. Рабинович А.С., Крамской М.А. Периодические орбиты релятивистского антипротона в нелинейном ядерном поле // Вестник МГОУ, сер. Физика-Математика, 2011, № 2, с. 44-52.

19. Рабинович А.С. Об одном обобщении уравнения Дирака для описания кварковой структуры нуклонов // Известия вузов. Физика, 2008, № 8, с. 44-49.
20. Рабинович А.С. Об одном нелинейном обобщении мезонной теории Юкавы ядерных сил // Вестник Российского университета дружбы народов, сер. Математика. Информатика. Физика, 2008, № 3, с. 92-98.
21. Рабинович А.С. Точные осесимметричные волновые решения уравнений Янга-Миллса // Теоретическая и математическая физика, 2006, т. 148, № 2, с. 243-248.
22. Рабинович А.С. О нелинейной электродинамике с уравнениями Янга-Миллса // Вестник Российского университета дружбы народов, сер. Физика, 2005, № 13, с. 68-77.

### Публикации в других изданиях

23. Рабинович А.С. Математические основы малоизученных аномальных физических явлений. – М.: УРСС, Кн. дом “Либроком”, 2015, 328 с.
24. Rabinowitch A.S. On axially symmetric solutions of the Navier-Stokes equations // International Journal of Advanced Mathematical Sciences, 2013, Vol. 1, No. 4, p. 199-206.
25. Rabinowitch A.S. New wave solutions of the Yang-Mills equations with axially symmetric sources // International Journal of Advanced Mathematical Sciences, 2013, Vol. 1, No. 3, p. 109-121.
26. Rabinowitch A.S. Quantum Yang-Mills Fields in the Superconductive Vacuum // Труды II Всероссийской конференции по проблемам физики частиц, физики плазмы и конденсированных сред, оптоэлектроники, М., РУДН, 2013, с. 15-18.
27. Rabinowitch A.S. On Yang-Mills Equations with Classical Sources // Труды XLVIII Всероссийской конференции по проблемам физики частиц, физики плазмы и конденсированных сред, оптоэлектроники, М., РУДН, 2012, с. 92-96.
28. Rabinowitch A.S., Abakumov S.Yu. Nonlinear Model of the Ionospheric Region F Based on Yang-Mills Theory // Труды XLVIII Всероссийской конференции по проблемам физики частиц, физики плазмы и конденсированных сред, оптоэлектроники, М., РУДН, 2012, с.30-33.
29. Рабинович А.С., Крамской М.А. Исследование замкнутых орбит нуклонов и антинуклонов, движущихся в нелинейных ядерных полях // Теоретическая физика: Материалы международной конференции, М., МГОУ, 2012, с. 232-242.
30. Rabinowitch A.S., Abakumov S.Yu. A new model of the earth atmosphere with strong electric fields described by means of the Yang-Mills theory // Теоретическая физика: Материалы международной конференции, М., МГОУ, 2012, с. 94-103.



31. Рабинович А.С., Абакумов С.Ю. Нелинейная модель ионосферы Земли // Новые информационные технологии. Сборник трудов XV Всероссийской научно-технической конференции, М., МГУПИ, 2012, с. 49-54.
32. Rabinowitch A.S. On New Solutions of Classical Yang-Mills Equations with Cylindrical Sources // Applied Mathematics, 2010, Vol. 1, No. 1, p. 1-7.
33. Рабинович А.С., Крамской М.А. Исследование периодических орбит нуклонов и антинуклонов в нелинейном поле ядерных сил // Вестник МГУПИ, 2010, № 29, с. 112-122.
34. Rabinowitch A.S. Nonlinear Physical Fields and Anomalous Phenomena.- New York: Nova Science Publishers, Inc., 2009, 245 p.
35. Рабинович А.С. О нелинейной теории сильных электромагнитных полей // Новейшие проблемы теории поля, Казань, КГУ, 2005, т. 5, с. 205–212.